数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 205-210

ディリクレのL-関数を $s=1$ でテーラー展開した時の係数について

新潟大学大学院自然科学研究科　石川 秀明 (Hideaki Ishikawa)

1 Introduction

ディリクレのL-関数を

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$$

で定義する。ここで $\chi(n)$ は mod q の ディリクレ指標とする。s=1 における L-関数の値 $L(1,\chi)$ とその微分係数については数論における重要な研究対象として、たくさんの人達によって研究されてきたことは、よく知られたことである。Berger [1], Selberg and Chowla [7] , Deninger [2], 等によって $L'(1,\chi)$ を 古典的な関数を用いて表すという結果が得られている。また金光先生 [4] によって、彼らの仕事を一般化した $L^{(n)}(1,\chi)$ に対する明示的な表現が得られている。豊泉先生 [8] は $L^{(n)}(1,\chi)$ の上からの評価式を χ が real で non-principal な場合について得ている。

本稿では q と χ を固定して, $L^{(n)}(1,\chi)$ を n の関数としてみた時の漸近的な挙動について考察する。定理として $L^{(n)}(1,\chi)$ の漸近展開を得る。その系として $L^{(n)}(1,\chi)$ の偏角と、ガウス和の偏角との間にある関係が存在することを示す。また $|L^{(n)}(1,\chi)|$ の大きさについても述べる。

ここで一般オイラー定数に関する松岡先生の仕事を紹介する。一般オイラー定数 γ_n は

$$\gamma_n=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{(\log k)^n}{k}-\frac{(\log N)^{n+1}}{n+1}\right)$$

で定義されて、リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ を $s=1$ でローラン展開した時の n 番目の項が $\frac{(-1)^n\gamma_n}{n!}(s-1)^n$ で表される。この一般オイラー定数は興味深い研究対象として古くから調べられてきている。松岡先生 [5] は γ_n の漸近展開を得る事に成功して、γ_n の詳しい挙動を調べることを可能とした。そして [6] において γ_n の正負の符号の変化と、$|\gamma_n|$ の大きさについてのより深い結果を得た。

本稿の定理と系は [5] [6] と同じテクニックを用いるのである。これは松岡先生の仕事の一般化として、ディリクレのL-関数版を行ったといえよう。

定義 1 次の関数を定義する：

$$\begin{aligned}\Phi_q(z)&=z\log q-(n+1)\log z-z\log 2\pi i+\log\Gamma(z)、\\ \Omega_q(z)&=z\log q-(n+1)\log z-z\log(-2\pi i)+\log\Gamma(z)。\end{aligned}$$

定義 2 定数 $h_{q,j}$ を次で定義する：

$$\exp\left[\Phi_q(a+yi)-\Phi_q(a+bi)+\frac{1}{2}\Phi_q''(a+bi)(y-b)^2\right]=\sum_{j=0}^{\infty}h_{q,j}(y-b)^j$$

ここで $a+bi$ は方程式 $\frac{d}{dz}\Phi_q(z)=0$ の解で $0<b<a, n^{1/2}<a<n$ を満たすものとする。

定義 3 記号を定義する：

$$\begin{aligned}
g_q(y) &= \mathrm{Re}\Phi_q(a+yi)、\\
f_q(y) &= \mathrm{Im}\Phi_q(a+yi)、\\
\Phi_q'(z) &= \frac{d}{dz}\Phi_q(z)、\\
g_q'(y) &= \frac{d}{dy}g_q(y)、\\
f_q'(y) &= \frac{d}{dy}f_q(y)、\\
\alpha &= \begin{cases} 0 & if\,\chi(-1)=1 \\ 1 & if\,\chi(-1)=-1 \end{cases}、
\end{aligned}$$

$$P(x)=\begin{cases}\cos x & (if\,\chi(-1)=1)\\ \sin x & (if\,\chi(-1)=-1)。\end{cases}$$

この時、次の結果が得られる。

定理 χ は modulo q の primitive な指標とする。この時ある $n_0>e^q$ が存在して全ての $n>n_0$ に対して

$$\begin{aligned}
(-1)^nL^{(n)}(1,\chi) &= i^{\alpha}\frac{n!}{\pi}\frac{\tau(\chi)}{q}\mathrm{Re}\left[(-i)^{\alpha}e^{\Phi_q(a+bi)}\sum_{m=0}^{N}h_{q,2m}\Gamma(m+1/2)\left(\frac{2}{\Phi_q''(a+bi)}\right)^{m+1/2}\right]\\
&\quad +i^{\alpha}\frac{\tau(\chi)}{q}\left(A_{q,\alpha}(n)+B_{q,\alpha}(n)\right)、
\end{aligned}$$

ただし $\frac{1}{2}(\log n)^2+3(\log n)(\log q)+3(\log q)^2-4>N$ とする。この $\tau(\chi)$ は ガウス和で、$\tau(\chi)=\sum_{r=1}^{q-1}\chi(r)e^{2\pi ir/q}$ で定義される。そして $A_{q,\alpha}(n)$ は実数値関数、及び $B_{q,\alpha}(n)$ は複素数値関数で、それぞれ

$$A_{q,\alpha}(n)=O\left(n!e^{g_q(b)}\frac{(\log n)^{\frac{11}{3}N+\frac{25}{6}}}{n^{\frac{1}{3}N-\frac{1}{6}}}\right),\quad B_{q,\alpha}(n)=O\left(n!e^{g_q(b)}\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{3}N+\frac{1}{3}}\right)$$

という評価を満たす。

系 1. 任意の $\mu>0$ に対して

$$|\arg(-1)^nL^{(n)}(1,\chi)-\arg i^{\alpha}\tau(\chi)|<\mu$$

を満たす n が無限に存在する。

remark 1. 講演を行った時点ではこの系で $\arg(-1)^n L^{(n)}(1,\chi)$ と $\arg\tau(\chi)$ との間に、何らかの関係を述べたことになると考えていたところ、講演における質疑応答で「系の主張からは、ガウス和の偏角との関連があるとは言い難いのではないか？。もしかしたら $\arg(-1)^n L^{(n)}(1,\chi)$ は全ての方向に一様に分布しているかも知れないのだから。」という御指摘をうけた。まことにそのとおりであり、この系から「$\arg(-1)^n L^{(n)}(1,\chi)$ と $\arg\tau(\chi)$ との間にある関係がある。」というのは早計である。御指摘下さった方に感謝いたします。その後の研究によってこの系を改良したものが得られたので、結果を載せておく。

定義 4 記号を定義する：
$S_\mu^+(N) = \sharp\{n \le N \mid |\arg(-1)^n L^{(n)}(1,\chi) - \arg i^\alpha \tau(\chi)| < \mu\}$、
$S_\mu^-(N) = \sharp\{n \le N \mid |\arg(-1)^n L^{(n)}(1,\chi) - (\arg i^\alpha \tau(\chi) + \pi)| < \mu\}$。

この時、次の結果を得る。

系 1*（改良版）． 任意に小さい $\mu > 0$ に対して、ある N_0 が存在して、$N > N_0$ なる全ての N に対して

$$S_\mu^+(N) = \frac{1}{2}N + O\left(\frac{N}{\log^\lambda N}\right) \qquad S_\mu^-(N) = \frac{1}{2}N + O\left(\frac{N}{\log^\lambda N}\right)$$

ここで λ は $0 < \lambda < 1$ の範囲で任意に与えて固定した実数値とする。

この改良された系は十分大きい n では、ほとんどの $L^{(n)}(1,\chi)$ が原点を通って偏角が $i^\alpha\tau(\chi)$ の直線の近くに集まっていると主張している。これは興味深く思われる。なぜなら $L^{(n)}(1,\chi) = \lim_{s\to 1+0} L^{(n)}(s,\chi)$ は実解析的な計算で求まる量であり、一方 $\tau(\chi)$ は本質的には関数等式に現れる複素解析的な量であるから、その両者の間に何らかの関係が見られるというのは面白い現象であると筆者は考えている。
大きさの評価については、以下の結果を得た。

系 2. ある n_0 が存在して全ての $n \ge n_0$ なる n に対して

$$|(-1)^n L^{(n)}(1,\chi)| \le q^{\frac{n}{\log n} - \frac{1}{2}} e^{n\log\log n - \frac{n\log\log n}{\log n}}$$

が成立する。

この評価式は正則関数のコーシーの係数評価式よりは良い評価を与えている。系 3 では下からの評価を得て、その評価は 系 2 で得た結果が、そんなに悪くはないことを保証する。

系 3. 不等式

$$|(-1)^n L(1,\chi)| \ge q^{\frac{n}{\log n} - \frac{1}{2}} e^{n\log\log n - A\frac{n\log\log n}{\log n}}$$

を成り立たせる n が無限に存在する。ここで A は、ある絶対定数。

Remark 2. 豊泉先生は [8] において次のような結果を得た：
$n \geq 0$ 、q は cube-free とした時に任意の$\epsilon > 0$ に対して、ある $q_0(\epsilon)$ が存在して、$q > q_0(\epsilon)$ に対して

$$|L^{(n)}(1,\chi)| \leq \left(\frac{1}{(k+1)4^{k+1}} \frac{L(1+\epsilon,\chi)}{\zeta(1+\epsilon)} + \epsilon\right) \log^{n+1} q。$$

この結果と筆者の得た系 3 は一見矛盾しているように見える。しかし豊泉先生の結果は関数 $\frac{(\log x)^n}{x}$ が望まれる区間において単調減少となるようにするため、暗黙のうちに q_0 は $\exp[\frac{1}{1+\epsilon}n]$ より大きいということを認めている。よって正確には $\exp[\frac{1}{1+\epsilon}n] \ll q_0$ という条件がつくので、実は矛盾はしていないことを注意しておく。

2 定理 と 系 の証明の概略

まず $L(s,\chi)$ の $s=1$ でのテーラー展開を考える：

$$L(s,\chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^{(n)}(1,\chi)}{n!}(s-1)^n.$$

ここで $s = 1-z$ とおくと、次を得る：

$$(-1)^n L^{(n)}(1,\chi) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z^{n+1}} L(1-z,\chi)dz$$

この C は中心が $z=0$ で半径が$\rho > 0$ の円周を反時計周りに一周するものとする。さらに、この積分路を変形して

$$\begin{aligned}(-1)^n L^{(n)}(1,\chi) &= \frac{n!}{2\pi i}\int_{E_1} \frac{1}{z^{n+1}} L(1-z,\chi)dz + \frac{n!}{2\pi i}\int_{E_2} \frac{1}{z^{n+1}} L(1-z,\chi)dz \\ &= H_1 + H_2\end{aligned}$$

この E_1 は実部が a で 0 から ∞ に伸びる垂直な直線であり, E_2 は 実部が a で$-\infty$ から 0 までの垂直な直線とする。$\chi(-1) = 1$ だと仮定する。関数等式を用いて被積分関数を書き換えて、H_1 と H_2 を次のように main term と error term に分ける：

$$H_1 = \frac{n!}{2\pi}\frac{\tau(\chi)}{q}\int_0^a e^{\Phi_q(a+yi)}dy + \text{error}$$

$$H_2 = \frac{n!}{2\pi}\frac{\tau(\chi)}{q}\int_{-a}^0 e^{\Omega_q(a+yi)}dy + \text{error}。$$

この時 $\Omega_q(\overline{a+yi}) = \overline{\Phi_q(a+yi)}$ なので

$$H_1 + H_2 = \frac{n!}{\pi}\frac{\tau(\chi)}{q}\text{Re}\int_0^a e^{\Phi_q(a+yi)}dy + \text{error}。$$

ここで鞍部点法を用いることで次の結果が得られる：
ある $n_0 > e^q$ が存在して、全ての $n > n_0$ に対して

$$
\begin{aligned}
H_1 + H_2 &= \frac{n!}{\pi}\frac{\tau(\chi)}{q}\mathrm{Re}\left[e^{\Phi_q(a+bi)}\sum_{m=0}^{N} h_{q,2m}\Gamma(m+1/2)\left(\frac{2}{\Phi_q''(a+bi)}\right)^{m+1/2}\right] \\
&\quad + \text{error}
\end{aligned}
$$

ただし $\frac{1}{2}(\log n)^2 + 3(\log n)(\log q) + 3(\log q)^2 - 4 > N$ とする。

さらに、この error term のところを丁寧に処理していくと定理の statement が得られるのである。

$\chi(-1) = -1$ の時の証明も同様に行うが、関数等式が少し異なるので、そのために main term の形に違いが生じるという事に注意する。これで証明終わりである。

系の証明については簡単に述べる。定理において N=0 の場合を考えると次の式が得られる：

$$
\begin{aligned}
&(-1)^n L^{(n)}(1,\chi) = \qquad (1)\\
&\quad i^{\alpha}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} n!\frac{\tau(\chi)}{q}e^{g_q(b)}\frac{n^{1/2}}{\log n}\{(1+C_{q,\alpha}(n))P(f_q(b)) + D_{q,\alpha}(n) + E_{q,\alpha}(n)\}
\end{aligned}
$$

ここで $C_{q,\alpha}(n)$, $D_{q,\alpha}(n)$ は ある実数値関数で、$E_{q,\alpha}(n)$ はある複素数値関数である。そしてそれぞれの大きさは

$$
C_{q,\alpha}(n) = O\left(\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)^{1/4}\right)、\quad D_{q,\alpha}(n) = O\left(\frac{1}{\log n}\right)、
$$
$$
E_{q,\alpha}(n) = O\left(\frac{(\log n)^{4/3}}{n^{5/6}}\right)
$$

と評価される。

ここで式 (1) における振動する関数 $P(f_q(b))$ の挙動と error term との関係を調べることで 系１、系 1*、系２、系３ の結果が得られる。

参考文献

[1] A. Berger, Sur une sommation de quelques séries, Nova acta Reg. Soc. Sci.Ups. (3) 12 (1883), 31 pp.

[2] C. Deninger, On the analogue of the formula of Chowla and Selberg for real quadratic fields, J. Reine Angew. Math. 351(1984), 172-191.

[3] A. Ivić, the Riemann zeta function, John Wiley, New York, 1985.

[4] S.Kanemitsu, On evaluation of certain limits in closed form Number Theory J-M. De Koninck C. Levesque (ed.)1989

[5] Y. Matsuoka, On the Power series Coefficients of the Riemann Zeta Function, Tokyo Journal of Mathematics Vol.12, No.1,pp.49-58, June 1989.

[6] Y. Matsuoka, Generalized Euler constants associated with the Riemann zeta function, Number theory and combinatories, pp.279-295, 1985 by World scientific Publishing Co.

[7] A. Selberg and S. Chowla, On Epstein's zeta-function, J. Reine Angew. Math. 227(1967), 86-110.

[8] M. Toyoizumi, On the size of $L^{(k)}(1, \chi)$, Journal of the Indian Math. Soc. Vol.60(1994), pp.145-149.

[9] E.T.Whittaker and G.N.Watson, A course of modern analysis, fourth ed., Cambridge Univ. Press, 1927.